<u>1)Testová část (8 otázek po 3 bodech)</u>

Ukázka testové části zkoušky (u označených úloh je nutné mít výpočet nebo obrázek (zde č. 1, 2 a 6)):

$\boxed{1}$) **Definiční obor** funkce $y = \sqrt{x^2 - 2x} + \arcsin x$ je: a) , b) , c) ,d) .

$\boxed{2}$) **Funkce** $y = x^3 + 1$ **je**:

a) lichá a v bodě $x = 1$ rostoucí
b) klesající a v bodě $x = 1$ konkávní
c) rostoucí a v bodě $x = 1$ konvexní
d) sudá a v bodě $x = 1$ klesající

3) **Součin A.B**, kde matice

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ a matice $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ je: a) , b) , c) , d) .

4) Soustava odpovídající **rozšířené matici** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ má:

a) právě 1 řešení,
b) nemá řešení,
c) má nekonečně mnoho řešení závislých na 1 parametru,
d) má nekonečně mnoho řešení závislých na 2 parametrech.

5) **Funkce** $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$ **má derivaci**: a) , b) ,c) , d) .

$\boxed{6}$) **Funkce s první derivací** tvaru $y' = \dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2}$ v bodě x = 1:

a) roste, b) klesá, c) má zde lokální minimum, d) má zde lokální maximum.

7) **Integrál** $\displaystyle\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$ **je roven**: a) , b) ,c) , d) .

8) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ **je vhodné řešit**:

a) metodou per partes, b) substitucí, c) úpravou a pak vzorcem, d) přímo základním vzorcem

2)Teoretická část (12 otázek po 2 bodech)

Ukázka několika otázek z teoretické části zkoušky z matematiky:

a) Uveďte příklad dvou vektorů dimenze 3, které jsou lineárně závislé:

b) Uveďte příklad funkce, která je ve svém definičním oboru ryze monotónní a nakreslete její graf:

c) Uveďte funkci inverzní k funkci $y = \mathrm{tg}\, x$, uveďte její obory $D(f)$, $H(f)$ a načrtněte její graf:

d) Nechť f je funkce spojitá v bodě $x_0 = -2$ a platí v tomto bodě $f'(-2) = 4$. Jakou vlastnost má potom funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = -2$?

e) Napište tvar Lagrangeova koeficientu $l_1(x)$ pro funkci danou tabulkou

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	-1	1	3

.

3)Praktická část (4 příklady po 8 bodech)

Ukázka praktické části zkoušky z matematiky:

1) Soustava lineárních rovnic:

Př.: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= -2 \\ 2x + 3y + 4z + u &= 2 \\ 3x + 4y + z + 2u &= -2 \\ 4x + y + 2z + 3u &= 2 \end{aligned}$$

2) Výpočet neurčitého nebo určitého integrálu substitucí nebo metodou per partes.
Výpočet objemu a plochy pomocí určitého integrálu.

Př.: Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = -x^2 + 2$, $y = x$.

3) Vyšetření monotónnosti, lokálních extrémů a konventy racionální lomené funkce nebo průběh polynomu.

Př.:Vyšetřete monotónnost a extrémy (případně konvexitu a inflexní body) funkce $y = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.

4) Aproximace funkce (2 metody).

a) **Př.**: Napište Lagrangeův polynom pro funkci danou tabulkou

x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	2	0	4

.

b) **Př.**: Vyrovnejte soubor přímkou metodou nejmenších čtverců a načrtněte graf

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	3	1	1	1	-1	-3

.

Několik vyřešených úloh k praktické části zkoušky

1) a) Soustava s jedním řešením **(**první dva příklady jsou jednoduché, spíš k testu T2, až ten třetí a čtvrtý odpovídá zkouškovému příkladu)

Řešte soustavu:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 10 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy (ozn. A) a rozšířené matice (ozn. A_r):

$$h(A) = h(A_r) = 3$$

počet neznámých: $n = 3$

$\Rightarrow$ 1 řešení

Řešíme odspodu, z výsledné matice:

$\boxed{x_3 = 2}$

$2x_2 + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -5}$

b) Soustava s nekonečně mnoha řešeními

$$\begin{aligned} &x + 2y + 3z = 0 \\ &x + y - 2z = 0 \\ &2x + 3y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 /.(-1) \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1-1 & 1-2 & -2-3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 /.(-2) \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 2-2 & 3-4 & 1-6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$h = 2, \quad h' = 2, \quad n = 3, \quad h < n \quad$ *nekoneč. mnoho riešení*

$$\begin{array}{lll} \underline{z = t} & -y - 5z = 0 & x + 2y + 3z = 0 \\ & y = -5z & x - 10t + 3t = 0 \\ & \underline{y = -5t} & \underline{x = 7t} \qquad t \in R \end{array}$$

c) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi počtu řešení:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & + 2x_2 & - 5x_3 & + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + x_2 & - 4x_3 & + 6x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + 2x_2 & - x_3 & + x_4 & = & 6 \\ & x_2 & + 3x_3 & - 4x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici soustavy, tj. matici tvořenou koeficienty u neznámých, ke kterým přidáme sloupec pravých stran:

$$\mathbf{A}_R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Tuto matici převedeme ekvivalentními úpravami na stupňový tvar.

V prvním sloupci budou pod prvkem $a_{11} = 1$ nulové prvky, když ke druhému řádku přičteme (–3)násobek prvního řádku a ke třetímu řádku přičteme první řádek:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-3)\ /.1 \\ \quad \hookleftarrow \\ \qquad \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \updownarrow \end{array} \sim$$

Vyměníme druhý řádek s posledním a vynulujeme 2. sloupec pod diagonálou:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(-4)\ /.5 \\ \quad \hookleftarrow \\ \qquad \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-18) \\ \\ \end{array} \sim$$

Zbývá upravit poslední řádek. Třetí řádek vydělíme číslem (–18) a v dalším kroku vynulujeme prvek 26. (kdybychom chtěli získat v posledním řádku místo čísla 26 nulu přímo, museli bychom násobit 3. řádek číslem 26, čtvrtý číslem 18 a sečíst je)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ .(-26) \\ \quad \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

Nyní máme stupňovou matici, můžeme tedy provést rozbor řešení.

Protože $h(\mathbf{A}) = 4$, $h(\mathbf{A}_R) = 4$, má soustava podle Frobeniovy věty řešení.

A protože počet neznámých $n = 4$, soustava má řešení právě jedno.

Při dalším výpočtu budeme postupovat od poslední neznámé. Víme, že stupňové matici máme přiřadit soustavu ekvivalentní s původní. Jednoduše řečeno: řádky matice zapíšeme opět jako rovnice. Postupujeme od poslední rovnice směrem k první a z každé rovnice vypočítáme jednu neznámou.

Poslední rovnice (z posledního řádku): $9x_4 = 9 \Rightarrow x_4 = 1$.

Předposlední rovnice: $x_3 - x_4 = 0$. Hodnotu x_4 známe, po dosazení dostaneme x_3.

$$x_3 - 1 = 0$$
$$x_3 = 1\ .$$

Napíšeme další rovnici, dosadíme už vypočítané neznámé a dostaneme x_2:

$$x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$$
$$x_2 + 3 - 4 = 1$$
$$x_2 = 2\ .$$

Z první rovnice dopočítáme x_1: $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -2$

$$x_1 + 2\cdot 2 - 5 + 1 = -2$$
$$x_1 = -2.$$

Vektor řešení $\vec{x} = (-2, 2, 1, 1)$.

d) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi počtu řešení:

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & -\ 4x_2 & +\ 5x_3 & +\ 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & -\ 2x_2 & +\ 2x_3 & +\ x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -\ 2x_2 & +\ 6x_3 & +\ x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -12x_2 & & +\ 6x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení: Protože jde o soustavu homogenní, alespoň jedno řešení jistě existuje. Pokud je právě jedno, je nulové. Při výpočtu postupujeme stejně jako u soustav nehomogenních.

Napíšeme rozšířenou matici soustavy, hned při vypisování vyměníme první a druhý řádek. Potom budeme převádět na matici stupňovou.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -12 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-2)\ /.(-3) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Zaměníme pořadí řádků. Druhý řádek posuneme na poslední místo, třetí řádek bude druhý a poslední řádek upravíme:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(3) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Poznámka: Řádek, jehož všechny prvky jsou nulové, jsme vynechali. Pokud bychom si závislosti druhého a třetího řádku povšimli, mohli jsme jeden z nich vyškrtnout hned a k získání stupňové matice stačilo upravit pořadí řádků.

Rozbor řešení: $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, $n = 4$. Soustava má řešení a protože $h < n$, má jich nekonečně mnoho. Řešení budou záviset na $n - h = 1$ parametru.

Dopočítávat začneme od poslední rovnice: $x_3 + 2x_4 = 0$.

Zde jsou 2 neznámé a jen jednu z nich můžeme explicitně vyjádřit. Ta druhá musí být parametrem. Zvolíme-li za parametr x_4, potom $x_3 = -2x_4$.

Další rovnice $2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -2x_3 + x_4$
$$2x_2 = -2(-2x_4) + x_4$$
$$2x_2 = 5x_4$$
$$x_2 = \frac{5}{2}x_4.$$

Z první rovnice pak: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$
$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 - x_4$$

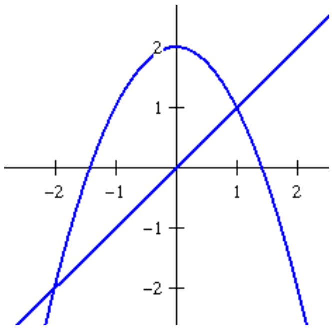
$$x_1 = 2 \cdot \frac{5}{2} x_4 - 2(-2x_4) - x_4$$
$$x_1 = 8x_4 .$$

Řešením soustavy je $\vec{x} = \left(8x_4 , \frac{5}{2} x_4 , -2x_4 , x_4 \right)$, kde $x_4 \in \mathbf{R}$.

2) Integrální počet (integrace substitucí, per partes, plocha, objem)

Př.: Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = -x^2 + 2,\ \ y = x$.

Řešení: Nakreslíme grafy obou funkcí



Obsah obrazce vypočítáme pomocí vzorce $P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, kde funkce $f(x) = -x^2 + 2, g(x) = x$.

Meze určitého integrálu (jako první souřadnice průsečíků obou křivek) určíme řešením soustavy:

$$\left.\begin{matrix} y = -x^2 + 2 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -x^2 + 2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

Tedy $P = \int_{-2}^{1} -x^2 + 2 - x\,dx$ a pak integrujeme pomocí vzorce č. 1 a 2.

3) <u>Extrém, monotónnost, konvexita, konkávita, inflexní body RLF nebo průběh polynomu</u>

Př.: Vyšetřete monotónnost funkce (tj. určete intervaly růstu a klesání funkce) a lokální extrémy funkce

$y = \frac{x^2}{x-1}$.(nebo vyšetření konvexity, konkávity a inflexních bodů s tím, že první derivace bude zadaná)

Řešení: a) $D(f) = \mathbf{R} / \{1\}$.

Vypočítáme první derivaci funkce $g(x)$ a upravíme ji: $g'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Určíme nulové body první derivace: $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$.

Jsou to body $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Funkce $g(x)$ může měnit monotónnost také v bodě, v kterém derivace neexistuje. Je to bod $x_3 = 1$.

<u>vyšetřování monotónnosti:</u>

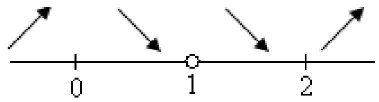
Vypočítáme znaménka derivace $f'(x)$ v jednotlivých intervalech, které jsou určeny získanými třemi body:

v intervalu $(-\infty, 0)$ zvolíme např. $x = -1$: $g'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{1+2}{4} > 0$, v intervalu $(0,1)$ zvolíme $x=\frac{1}{2}$: $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{-}{+}<0$,

v intervalu $(1,2)$ zvolíme $x=\frac{3}{2}$: $g'\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{9}{4}-3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{-}{+}<0$,

v intervalu $(2,\infty)$ zvolíme $x=3$: $g'(3)=\dfrac{9-6}{2^2}=\dfrac{+}{+}>0$.

Funkce $g(x)$ je rostoucí v intervalech $(-\infty,0)$ a $(2,+\infty)$, klesající v intervalech $(0,1)$ a $(1,2)$.



Tedy v bodě 0 je lokální maximum a v bodě 2 je lokální minimum.

Př.: Vyšetřete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

$$y'=\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

a) $y'=0$

$-x^2+1=0$ Stacionární body

$-x^2=-1$ $S_1\left[1;\frac{1}{2}\right]$

$x^2=1$

$x=\pm1$ $S_2\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

b) body, kde derivace neexistuje, funkce nemá

Pokud *y*´> 0 funkce je rostoucí, pokud *y*´< 0 funkce je klesající
Hodnoty *x* stacionárních bodů (konkrétně zde *x* = +1, -1) jsou klíčové, v těchto bodech se funkce může měnit z rostoucí na klesající a naopak (funkce nemá žádné body, ve kterých první derivace neexistuje. Pokud by takové byly, museli bychom je vzít pro vyšetřování monotónnosti v úvahu)

zvolíme x = -2; potom y´(-2) = -3/25 → funkce je v intervalu (-∞; -1) klesající

zvolíme x = 0; potom y´(0) = 1 → funkce je v intervalu (-1; 1) rostoucí

zvolíme x = 2; potom y´(-2) = -3/25 → funkce je v intervalu (1;∞) klesající

Na základě růstu a klesání určíme extrémy (v boděx=-1 je lokální minimum, v x=1 je lokální maximum).

4) Numerické metody (aproximace funkce)

Př.: Metodou nejmenších čtverců proložte přímku danými body $(-1;-5),(0;-4),(2;-1),(5;2),(7;6),(9;13)$ a načrtněte obrázek.

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i)^2$
-1	-5	5	1
0	-4	0	0
2	-1	-2	4
5	2	10	25
7	6	42	49
9	13	117	81
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 22$	$\sum_{i=1}^{6} y_i = 11$	$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 172$	$\sum_{i=1}^{6} (x_1)^2 = 160$

Koeficienty a, b přímky $y = ax + b$ určíme řešením soustavy:

$$a\sum_{i=1}^{6}(x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{6} x_i + b.6 = \sum_{i=1}^{6} y_i$$

Tedy $160a + 22b = 172$, $22a + 6b = 11$ z druhé rovnice $\Rightarrow b = \dfrac{11-22a}{6}$, dosazením do první je

$160a + 22\dfrac{11-22a}{6} = 172$, tedy $a = \dfrac{395}{238} \cong 1{,}66$ a dosazením do druhé rovnice $b = \dfrac{11-22\frac{395}{238}}{6} \cong -4{,}25$

Tedy přímka má tvar:

$y = 1{,}66x - 4{,}25$ Navíc je třeba nakreslit obrázek (viz přednáška a cvičení).

Př.: Napište Langrangeův interpolační polynom procházející danými body

x	3	5	6
y	-1	2	7

Řešení: Lagrangeův polynom má tvar: $L_2(x) = f(x_0).l_0(x) + f(x_1).l_1(x) + f(x_2).l_2(x)$,

kde $l_k(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_n)}$, přičemž v čitateli je vynechán výraz $(x - x_k)$ a ve jmenovateli výraz $(x_k - x_k)$.

$$l_0(x) = \frac{(x-5)(x-6)}{(3-5)(3-6)} = \frac{x^2-11x+30}{6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(5-3)(5-6)} = \frac{x^2-9x+18}{-2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(6-3)(6-5)} = \frac{x^2-8x+15}{3}$$

$$L_2(x) = -1\frac{x^2-11x+30}{6} + 2\frac{x^2-9x+18}{-2} + 7\frac{x^2-8x+15}{3} = \frac{7x^2-47x+72}{6}$$